Tentamen Signaalanalyse 28 februari 1997
9.30-12.30 u

Gebruik voor de beantwoording van de onderstaande <u>4 vraagstukken</u> antwoordvellen met daarop:
1) je naam , 2) het betreffende vraag- en onderdeelnummer.
Zet op het eerste antwoordvel het <u>totaal</u> aantal ingeleverde vellen.

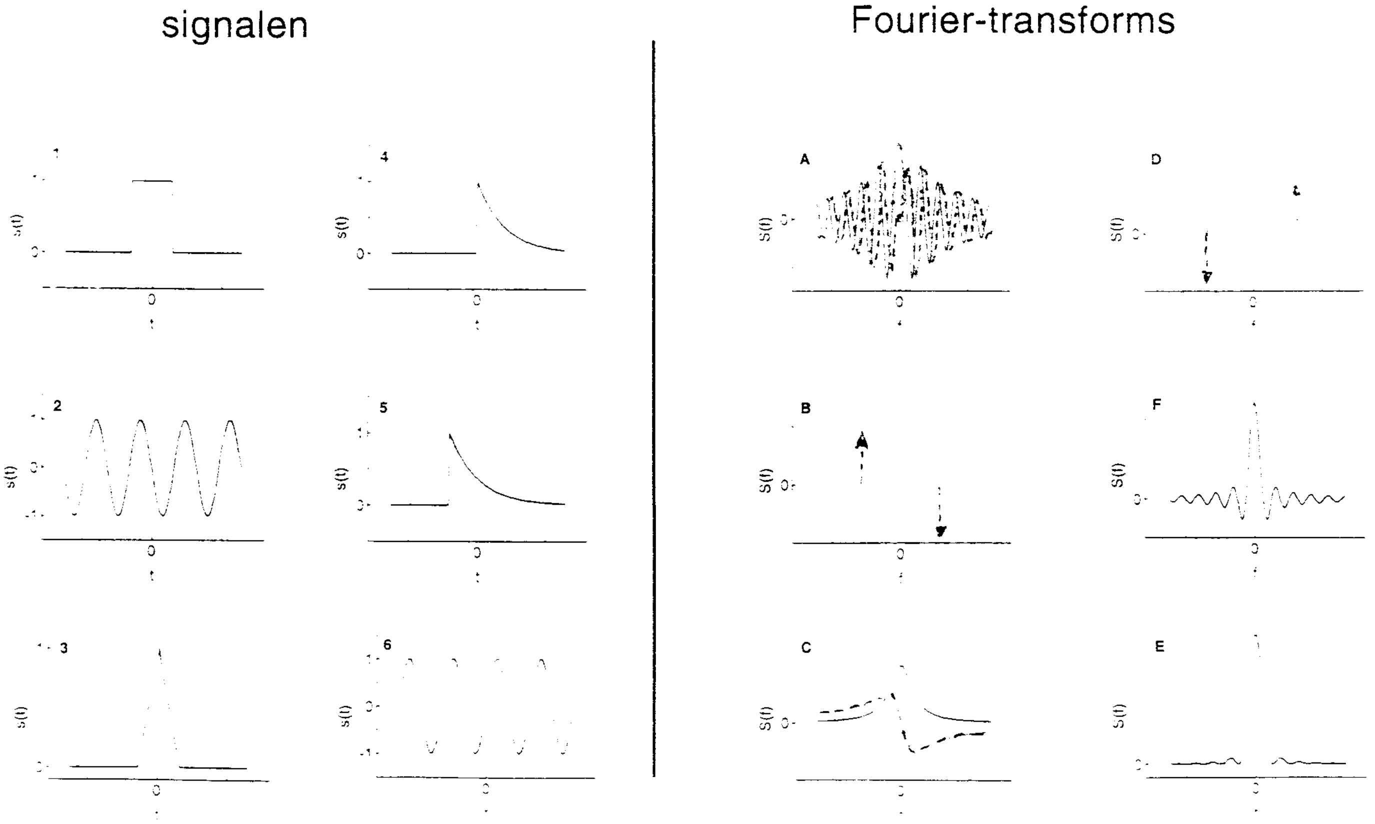
<u>vraag 1:</u>

a) Laat zien dat voor de Fourier-transform, *S(f),* van het reële signaal *s(t)* geldt dat het reële gedeelte van *S(f)* een even functie van *f* is en dat het imaginaire gedeelte van *S(f)* een oneven functie van *f* is.

b) Laat zien dat de Fourier-transform *S(f),* van een reëel even (mbt de tijd *t*) signaal, *s(t),* alleen uit een reëel even gedeelte bestaat.

c) Laat zien dat de Fourier-transform *S(f),* van een reëel oneven (mbt de tijd *t*) signaal, *s(t),* alleen uit een imaginair oneven gedeelte bestaat.

d) Hieronder staan 6 verschillende signalen en 6 daarbij behorende Fourier-transforms. Geef door middel van het plaatsen van de juiste letter achter het cijfer van het signaal aan welke transform bij welk signaal hoort. De reële gedeelten van de Fourier-transforms zijn weergegeven met een volle lijn, imaginaire gedeelten met een stippellijn. *(N.B. Gebruik voor de beantwoording een antwoordvel en niet dit opgaveblad)*



vraag 2:

Een discreet filter geeft een signaal w_n op de uitgang in respons op een stationair signaal s_n op de ingang, waarbij geldt:

$$w_n = \frac{s_n + s_{n-1}}{2},$$

voor de autocorrelatiefunctie van s_n geldt: $R_s(k) = e^{-\alpha |k| T}$, $\alpha > 0$.

a) Laat zien dat voor de autocorrelatie van w geldt:

$$R_w(n,m) = \tfrac{1}{2} e^{-\alpha |k| T} + \tfrac{1}{4}\left[e^{-\alpha |k-1| T} + e^{-\alpha |k+1| T}\right] \quad \text{met} \quad k = n - m$$

b) Laat zien dat het powerspectrum van s_n. kan worden geschreven in de vorm:

$$\hat{\mathcal{P}}_s(f) = T\left[\sum_{k=0}^{k=\infty} \beta^k + \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\beta^*\right)^k - 1\right] \quad \text{met } \beta = e^{(-\alpha - i2\pi f)T}$$ en dat dit kan worden uitgewerkt tot:

$$\hat{\mathcal{P}}_s(f) = T \frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 + e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} \cos 2\pi f T}$$

N.B. β^* *staat voor de complex geconjugeerde van* β.

c) Laat zien dat de filterrespons, $\hat{H}(f)$, van het filter wordt gegeven door:

$$\hat{H}(f) = \frac{1 + e^{-i2\pi f T}}{2}$$

d) Laat m.b.v. de filterrespons gegeven in onderdeel c) zien dat voor het powerspectrum van het uitgangsignaal w geldt:

$$\hat{\mathcal{P}}_w(f) = \left(\frac{1 + \cos(2\pi f T)}{2}\right) \hat{\mathcal{P}}_s(f)$$

e) Leid het resultaat gegeven in onderdeel d) nu rechtstreek af uit de autocorrelatiefunctie van w, gegeven in onderdeel a).

vraag 3

a) Beschrijf kort het verschil tussen deterministische signalen en random signalen.

b) Stel dat men via bemonstering over (lange) tijdsreeksen beschikt van een deterministisch signaal alswel een stationair random signaal. Geef kort aan wat dan de verschillen moeten zijn in de bepaling van de frequentie-inhoud van beide signalen en waarom.

vraag 4:

Een signaal, $w(t)$, bestaat uit de superpositie van een grondtoon met frequentie f_0, en 2 harmonische componenten, $2 \cdot f_0$ en $3 \cdot f_0$, plus een random ruis $r(t)$:

$$w(t) = r(t) + \sum_{k=1}^{3} [a_k \cdot \sin(kf_0 t) + b_k \cdot \cos(kf_0 t)] .$$

Voor het powerspectrum, $\mathcal{P}_r(f)$, van $r(t)$ geldt:

$$\mathcal{P}_r(f) = K, \quad f \le \frac{f_0}{10} \quad \text{en} \quad \mathcal{P}_r(f) = 0, \quad f > \frac{f_0}{10} .$$

a) Maak een schematische schets van $w(t)$. Voor de schets kan worden aangenomen dat de harmonische componenten in $w(t)$ gelijk aan nul zijn ($a_i, b_i = 0, \; i = 2,3$).

b) Geef een uitdrukking voor het powerspectrum van $w(t)$ als functie van f en maak daarvan een schematische schets.

c) Wat is op grond van het Nyquist-criterium de minimale sample-frequentie ($1/T$) die kan worden gebruikt om $w(t)$ te bemonsteren?

Stel nu dat de bemonstering-frequentie, ($1/T$) gelijk aan $12 \cdot f_0$ wordt gekozen. Om selektief de ruis $r(t)$ in het uitgangssignaal $w(t)$ te bepalen wordt een discreet "moving average" filter toegepast op de bemonsterde signalen, zodanig dat er steeds over een hele periode van de grondtoon (= 12 punten) wordt gemiddeld. Het gefilterde signaal, $q(nT)$, wordt dan gegeven door:

$$q(nT) = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} w(n-j) \cdot T \qquad \text{met } T = \frac{T_0}{12} = \frac{1}{12 \cdot f_0}$$

d) Leg uit, in het tijdsdomein, waarom dit filter de grondtoon effectief uit het bemonsterde signaal filtert. Gebruik hiervoor eventueel een schematische tekening.

e) Laat zien dat voor de frequentie-respons, $\hat{H}(f)$, van het discrete "moving average" filter geldt:

$$\hat{H}(f)^2 = \frac{\sin^2(12\pi f T)}{144 \cdot \sin^2(\pi f T)} \qquad \textit{Gegeven: } \sum_{k=0}^{N} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \quad \text{en} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

f) Maak een schets van de absolute waarde van de frequentie-respons van het filter als functie van f en leg nu in het frequentiedomein uit waarom het "moving average" filter effectief de grondtoon <u>en de twee harmonische componenten</u> uit $w(t)$ filtert, terwijl de ruis vrijwel geheel word doorgelaten.

g) Geef een uitdrukking van het powerspectrum ($\hat{\mathcal{P}}_q(f)$) van het gefilterde signaal.